О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ К НЕКОТОРЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА

Н.Л. Поляков

Финансовый Университет при Правительстве РФ
Щербаковская 38, 105187 Москва, РФ gelvella@mail.ru

Введение. *Теория коллективного выбора* (social choice theory) изучает различные методы агрегирования коллективных предпочтений по профилям индивидуальных предпочтений. Классическим результатом теории коллективного выбора является известная *теорема Эрроу о невозможности*, см. [1-2]. Эта теорема утверждает, что не существует процедуры агрегирования рациональных предпочтений, обладающей некоторыми естественными свойствами. В работе [3] С. Шелах установил, что принцип невозможности Эрроу может быть распространен на нерациональные предпочтения при некоторых дополнительных условиях. Доказательство основной теоремы работы [3] использует понятия теории функциональных систем; в т.н. простом случае оно может быть проинтерпретировано как описание фрагмента *соответствия Галуа для классов дискретных функций* (о соответствии Галуа $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$ для классов дискретных функций см. [4]). Подход С. Шелаха оказывается весьма плодотворным и может претендовать на роль одного из универсальных методов абстрактной теории коллективного выбора. С помощью модификации этого подхода была установлена полная классификация симметричных классов r-функций выбора, обладающих *свойством Эрроу*, см. [5]. Одновременно этот подход позволяет легко получить некоторые позитивные результаты (*теоремы о возможности*) в случае т.н. ограниченных областей (restricted domains). В настоящей работе мы приводим полное описание множества клонов простых правил агрегирования, которые сохраняют какое-либо симметричное множество *решающих правил*. Заметим, что для каждого клона $\mathcal{F}$ из этого множества можно дать несложное описание множества $\mathrm{inv}\,\mathcal{F}$, что позволяет еще шире распространить принцип Эрроу, а также обнаружить некоторые "патологические" случаи его нарушения.

Базовые понятия. Пусть даны конечные множества Q (условий), A (решений) и $\mathbb{C} \subseteq A^Q$ (решающих правил). В типичной ситуации множество Q есть множество всех непустых подмножеств множества A (или множество $[A]^2$ неупорядоченных пар элементов множества A), а $\mathbb{C}$ есть множество всех функций выбора (или, соответственно, их ограничений на $[A]^2$). В более общей ситуации в качестве $\mathbb{C}$ можно рассматривать множество функций выбора на мультимножествах или на подмножествах множества A, обогащенных некоторой дополнительной структурой.

Множество $\mathbb{C}$ называется *симметричным*, если для каждой перестановки σ множества A существует такая перестановка σ^* множества Q, что вместе с каждой функцией h множество $\mathbb{C}$ содержит функцию h_σ, определенную равенствами

$$h_\sigma(q) = \sigma^{-1}h(\sigma^* q)$$

для всех $q \in Q$ (свойство симметричности играет роль замкнутости относительно изоморфизмов).

Пусть дано натуральное число n (участников голосования или критериев). (Простое) *правило агрегирования* это любая функция $f\colon A^n \to A$, удовлетворяющая условию *консервативности* (иначе, *квазитривиальности*)

$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in A) \bigvee_{1\le i\le n} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_i$$

(о правилах агрегирования более общего вида см. [3,5]).

Правило агрегирования f *сохраняет множество* $\mathbb{C}$, если для каждой n-ки $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ множество $\mathbb{C}$ содержит функцию $f(h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Легко проверить, что отношение сохранения функцией f (произвольной арности) на множестве A множества $\mathbb{C} \subseteq A^Q$ в естественном смысле порождает соответствие Галуа между булевыми решетками $\mathcal{P}(\bigcup\limits_{n<\omega} A^{A^n})$ и $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A^Q))$. Это соответствие можно рассматривать как фрагмент соответствия $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$ (см. [4]), если каждое множество $\mathbb{C} \subseteq A^Q$ отождествить с предикатом $\{(h(q_1), h(q_2), \ldots, h(q_m)) \colon h \in \mathbb{C}\}$, где $m = |Q|$ и $(q_i)_{i \leq m}$ есть фиксированная нумерация множества Q. Из этого, в частности, вытекает, что множество правил агрегирования, которые сохраняют некоторое множество $\mathbb{C}$, замкнуто относительно композиции и содержит все проекции, т.е. есть *клон*. Клон всех (простых) правил агрегирования, которые сохраняют множество $\mathbb{C}$, обозначим символом $\mathrm{Av}\,\mathbb{C}$. Следующая теорема дает эффективное описание множества $\{\mathrm{Av}\,\mathbb{C} \colon \mathbb{C}$ симметрично$\}$.

Основная теорема. Вначале мы определим некоторые специальные клоны правил агрегирования. Множество всех правил агрегирования обозначим символом Av. Для каждого натурального числа r символом $A^{\leq\omega}_{<r}$ обозначим множество $\{\mathbf{a} \in A^{<\omega} \colon |\mathrm{ran}\,\mathbf{a}| < r\}$.

Клоны E_r**.** Для каждого натурального числа $r \geq 2$ символом E_r обозначим множество всех функций $f \in \mathrm{Av}$, которые совпадают с некоторой проекцией на множестве $A^{\leq\omega}_{<r}$.

Клоны M_m**.** Для каждого натурального числа $m \geq 2$ символом M_m обозначим множество всех функций $f \in \mathrm{Av}$, которые удовлетворяют условию

$$(f(\mathbf{a}) = a \wedge \{i \in \mathrm{dom}\,\mathbf{a} \colon a_i = a\} \subseteq \{i \in \mathrm{dom}\,\mathbf{b} \colon b_i = b\}) \to f(\mathbf{b}) = b$$

для всех $\mathbf{a} \in A^{\leq\omega}_{<3}$, $\mathbf{b} \in A^{\leq\omega}_{<m}$ $(\mathrm{dom}\,\mathbf{a} = \mathrm{dom}\,\mathbf{b})$, $a \in \mathrm{ran}\,\mathbf{a}$, $b \in \mathrm{ran}\,\mathbf{b}$.

Клоны F_R**.** Бинарное отношение R на множестве $A^{<\omega}$ называется *устойчивым*, если

1. $\mathbf{a}\,R\,\mathbf{b} \to \mathbf{a} = \sigma\mathbf{b}$ для некоторой перестановки σ множества A;
2. $\mathbf{a}\,R\,\mathbf{b} \to \sigma\mathbf{a}\pi = \sigma\mathbf{b}\pi$ для любой перестановки σ множества A, натурального числа k и функции $\pi \colon \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathrm{dom}\,\mathbf{a}$.

Для каждого устойчивого отношения отношения эквивалентности R на множестве $A^{<\omega}$ символом F_R обозначим множество всех функций $f \in \mathrm{Av}$, которые совпадают с некоторой проекцией на каждом классе эквивалентности отношения R.

Клоны P_Π**.** Пусть Π есть один из Постовских классов, который состоит из функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, и замкнут относительно двойственности. Для каждого двухэлементного множества B обозначим символом Π_B клон с носителем B, эквивалентный Постовскому классу Π. Символом P_Π обозначим множество всех функций $f \in \mathrm{Av}$, удовлетворяющих условию $f \restriction B^{<\omega} \in \Pi_B$ для всех $B \in [A]^2$.

Теорема 1. *Пусть дано симметричное множество $\mathbb{C} \subseteq A^Q$ (решающих правил). Тогда существуют такие натуральные числа $m, r \geq 2$, устойчивое отношение эквивалентности R на множестве $A^{<\omega}$ и замкнутый относительно двойственности Постовский класс $\Pi \subseteq T_{01}$, что*

$$\mathrm{Av}\,\mathbb{C} = \mathrm{E}_r \cap \mathrm{M}_m \cap \mathrm{F}_R \cap \mathrm{P}_\Pi.$$

Литература

1. Arrow K. *Social Choice and Individual Values.* 2 edition. Yale University Press: 1963.

2. Geanakoplos J. *Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem* // Economic Theory. 2005. V. 26. №. 1. P. 211–215.

3. Shelah S. *On the Arrow property* // Advances in Applied Mathematics. 2005. V. 34. P. 217–251.

4. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. *Теория Галуа для алгебр Поста* // Кибернетика. 1969. Т 3. С. 1-10. Т.5. С. 1–9.

5. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. *Об одном обобщении теоремы Эрроу* // Докл. РАН. 2014. Т. 456. № 2. С. 143–145.